Δευτέρα 15 Μαΐου 2017

## Γενίκευση της εξίσωσης Euler

Η συνθήκη περιορισμού στις εξισώσεις Euler μπορεί επίσης να γραφτεί σε ολοκληρωτική μορφή.
Δηλαδή, αν ζητάμε την $\psi=\psi(x)$ για την οποία το συναρτησιοειδές $J[\psi] = \int_a^b f(x,\psi,\psi')dx$

να έχει ακρότατο με $\psi(a)=A$, $\psi(b)=B$
και επιπλέον το συναρτησιοειδές
$K[\psi] = \int_a^b g(x,\psi,\psi')dx$

να είναι σταθερό.

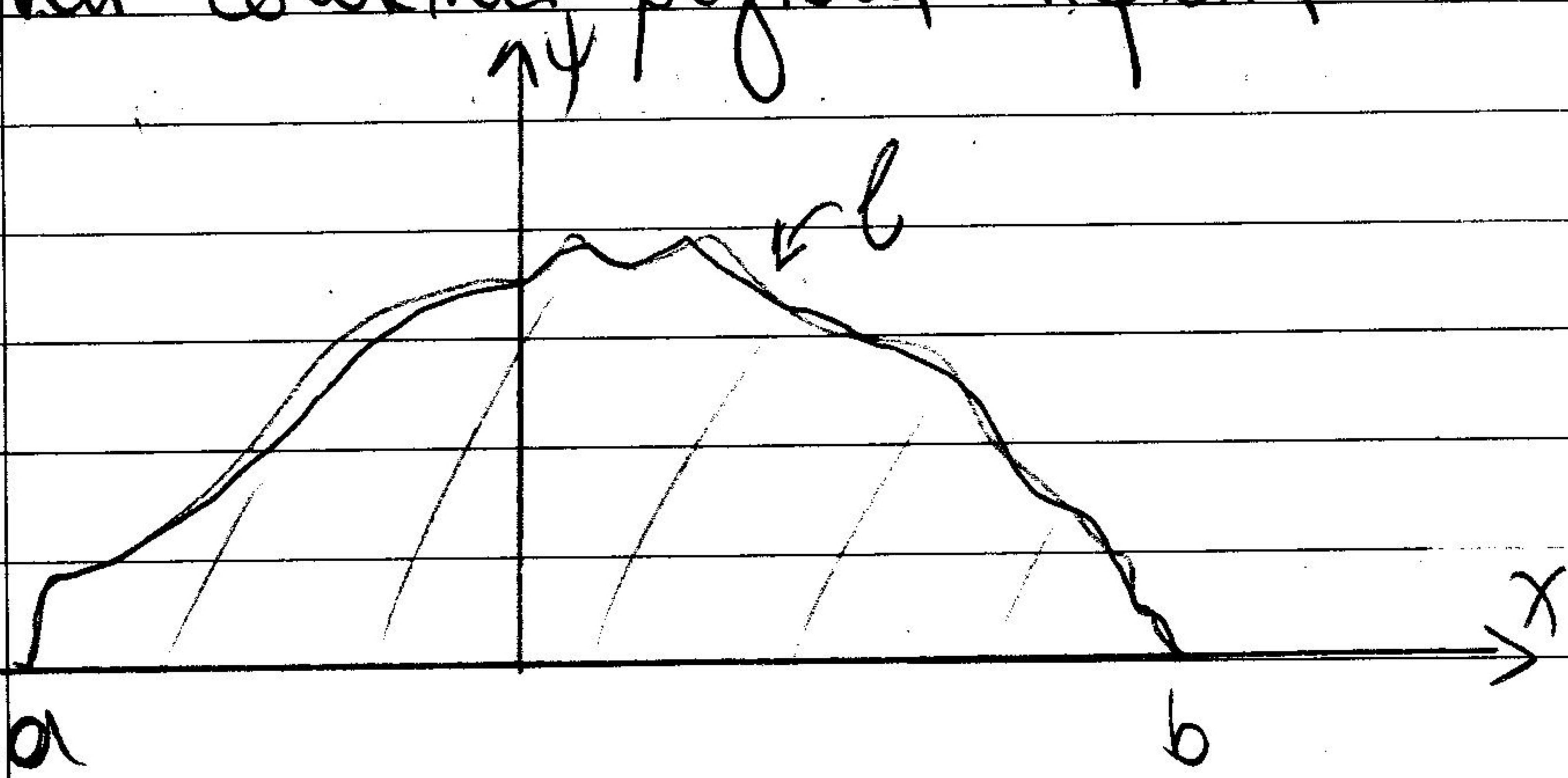
Επί της ουσίας λοιπόν ζητάμε τη σταθερά $\lambda$ για την οποία το $\int_a^b (f+\lambda g)dx$ έχει ακρότατο

Τελικά η αντίστοιχη εξίσωση Euler θα είναι

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \psi'} + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial \psi'}\right) = 0$$

όπου $\psi(a)=A$, $\psi(b)=B$ και $K[\psi]=l$ σταθερά

Παράδειγμα: Να βρεθεί η καμπύλη $\psi=\psi(x)$, σταθερού μήκους $l$ που φράσσεται από τον οριζόντιο άξονα και εσωκλείει μέγιστη περιοχή.




⟶

$$J[\psi] = \int_a^b \underbrace{\psi(x)}_{f}\, dx$$

$$K[\psi] = \int_a^b \sqrt{(dx)^2 + (d\psi)^2} = \ell.$$

$$= \int_a^b \underbrace{\sqrt{1+(\psi')^2}}_{g}\, dx = \ell$$

$f = \psi$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial \psi} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial \psi'} = 0$

$g = \sqrt{1+(\psi')^2}$

το ψ, ψ' είναι ανεξάρτητες μεταβλητές εδώ

$$\frac{\partial g}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \psi'} = \frac{2\psi'}{2\sqrt{1+(\psi')^2}} = \frac{\psi'}{\sqrt{1+(\psi')^2}}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1+x^2}$$

$$1 - 0 + \lambda\left(0 - \frac{d}{dx}\frac{\psi'}{\sqrt{1+(\psi')^2}}\right) = 0$$

$$\lambda \cdot \frac{d}{dx}\frac{\psi'}{\sqrt{1+(\psi')^2}} = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\psi'}{\sqrt{1+(\psi')^2}} = \frac{x}{\lambda} + c \quad \text{ή} \quad \frac{\lambda\psi'}{\sqrt{1+(\psi')^2}} = x + c$$

$$\frac{\lambda^2(\psi')^2}{1+(\psi')^2} = (x+c)^2 \Rightarrow \lambda^2(\psi')^2 = (x+c)^2 + (x+c)^2(\psi')^2$$

$$\Rightarrow (\psi')^2 = \frac{(x+c)^2}{\lambda^2 - (x+c)^2}$$

$$(\psi') = \pm\frac{x+c}{\sqrt{\lambda^2-(x+c)^2}}$$

$\rightarrow$

$$\psi = \pm \int \frac{x+c}{\sqrt{\lambda^2-(x+c)^2}}\,dx \qquad \omega = x+c, \quad d\omega = dx$$

$$= \pm \int \frac{\omega}{\sqrt{\lambda^2-\omega^2}}\,d\omega = \mp \sqrt{\lambda^2-\omega^2} + c_2$$

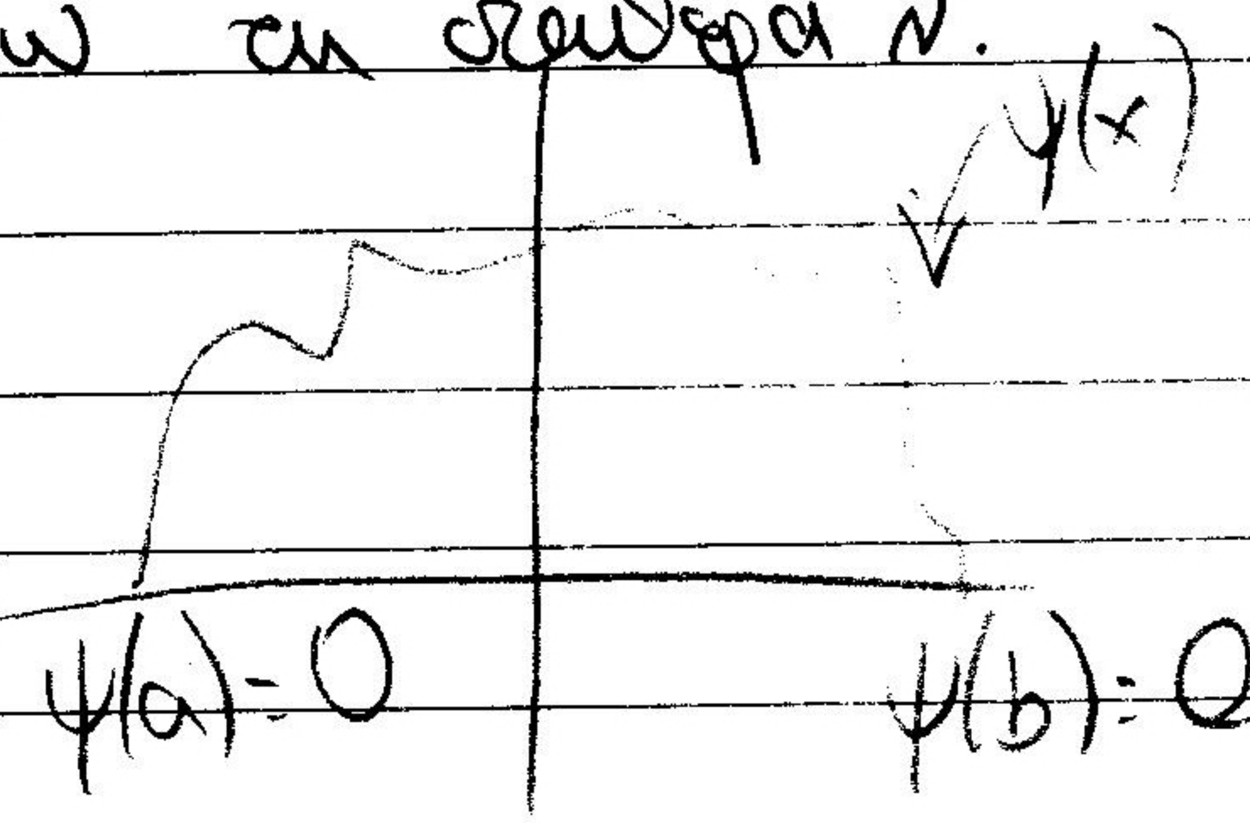
$$(\psi - c_2) = \mp \sqrt{\lambda^2-(x+c)^2} \Rightarrow$$
$$(\psi - c_2)^2 + (x+c)^2 = \lambda^2 \quad \text{(κλειστή καμπύλη)}$$

Για να είναι ανοιχτή καμπύλη $(\ )^2 - (\ )^2 \neq \lambda^2$

Συνοριακές συνθήκες και να βρω τη σταθερά λ.

$\psi(a) = 0$
$\psi(b) = 0$

$$\left.\begin{aligned} c_2^2 + (a+c)^2 &= \lambda^2 \\ c_2^2 + (b+c)^2 &= \lambda^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c = c_2 = 0$$




$\psi^2 + x^2 = \lambda^2$

Ημικύκλιο ακτίνας λ και μήκος ℓ

$$\frac{2\pi\lambda}{2} = \ell \Rightarrow \lambda = \frac{\ell}{\pi}$$

Τελικά, $\boxed{x^2 + \psi^2 = \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2}$

Παρατήρηση: Εν γένει για να υπολογίσουμε τις άγνωστες σταθερές από τη λύση της εξίσωσης Euler χρησιμοποιούμε κατά σειρά τις συνοριακές συνθήκες και στο τέλος αντικαθιστούμε στο $K[\psi] = \int_a^b g(x,\psi,\psi')\,dx = \ell$

την $\psi = \psi(x)$ για υπολογίσαμε και την σταθερά λ.

# Ο συμβολισμός των μεταβολών

Γνωρίζουμε ότι $\frac{\partial J}{\partial a} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \psi'} \right) \frac{\partial \psi}{\partial a}\, dx$

$J[\psi] = \int_{x_1}^{x_2} f(x,\psi,\psi')dx$, γράφουμε

$\psi = \psi(x,a) = \psi(x,0) + a n(x)$

Δημιουργούμε τη μεταβολή

$$\delta J = \frac{\partial J}{\partial a} da = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \psi'} \right) \frac{\partial \psi}{\partial a}\, dx \cdot da$$

$$\delta\psi = \frac{\partial \psi}{\partial a} da = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \psi'} \right) \delta\psi\, dx$$

Η συνθήκη για ακρότατο γράφεται

$\delta J = \delta \int_{x_1}^{x_2} f(x,\psi,\psi') = 0$ και συνεπώς

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \delta f\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial \psi}\delta\psi + \frac{\partial f}{\partial \psi'}\delta\psi' \right) dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \psi'} \right) \delta\psi\, dx$$

$\longrightarrow$

# Παράδειγμα

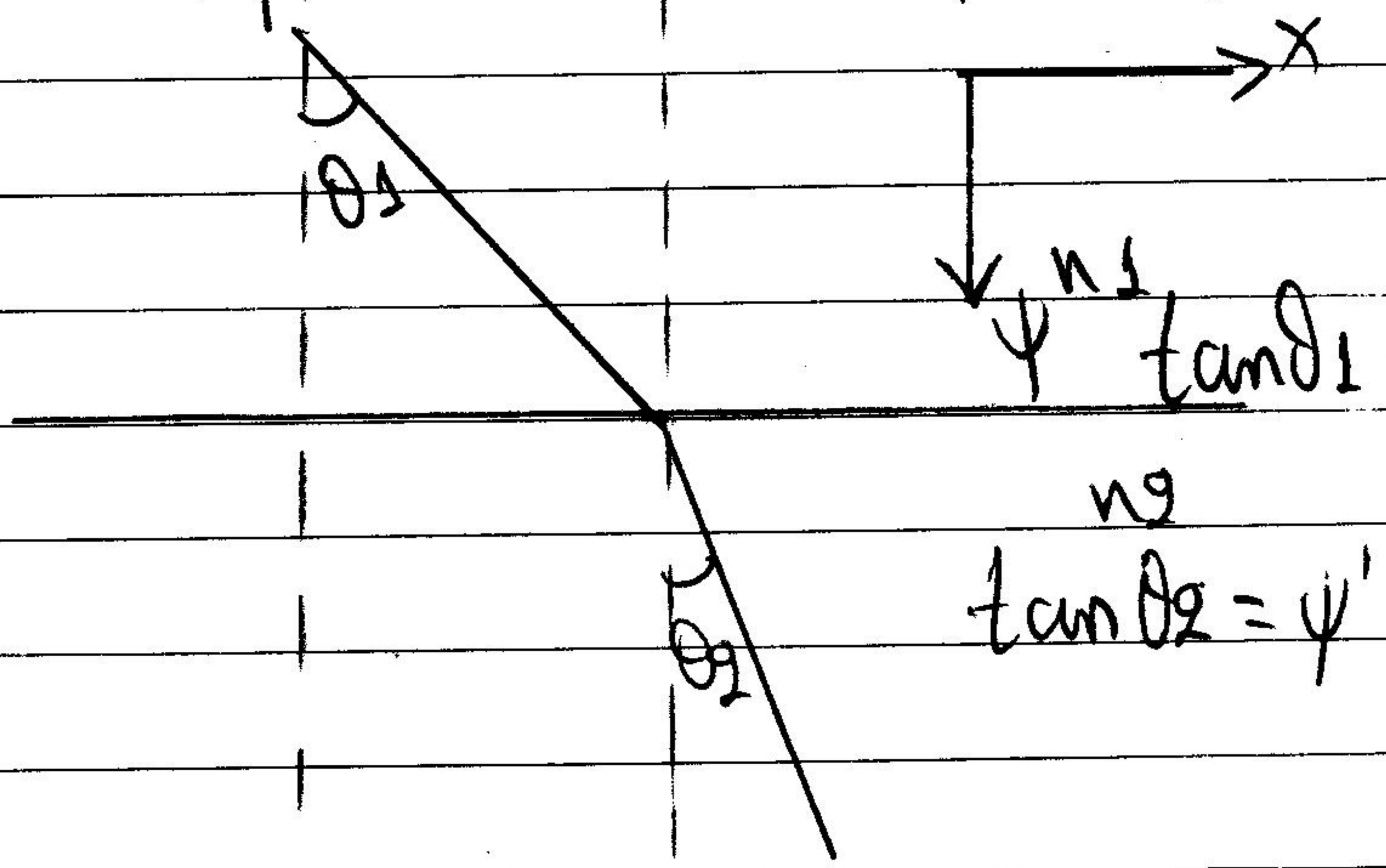
Ο νόμος του Snell ή η αρχή του Fermat

Αρχή Fermat:

Το φως οδεύει μέσω της διαδρομής που ελαχιστοποιεί το δρόμο που διανύει

Ο νόμος του Snell

Φως περνάει από ένα μέσο, με δείκτη διάθλασης $n_1$




σε άλλο μέσο με δείκτη διάθλασης $n_2$.

Να δείξετε ότι $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$

Ταχύτητα φωτός σε μέσο με δείκτη διάθλασης $n$

$V = \frac{c}{n}$, $c$ όταν $n=1$, το κενό.

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{V} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{(dx)^2+(d\psi)^2}}{V} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+(\psi')^2}\,dx}{V}$$

$$f = \frac{1}{V}\left(1+\psi'^2\right)^{1/2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \psi'} = 0 \Rightarrow 0 - \frac{1}{V}\frac{d}{dx}\frac{\psi'}{\sqrt{1+(\psi')^2}} = 0 \rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{v}\frac{\psi'}{\sqrt{1+(\psi')^2}} = c'}$$ σταθερή και για τις δυο περιοχές

$$1)\ \frac{n_1}{c}\frac{\tan\theta_1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_1}} = c' \quad \Rightarrow \quad \frac{n_1}{c}\cdot\frac{\tan\theta_1}{1/\cos\theta_1} = c'$$

$$2)\ \frac{n_2}{c}\frac{\tan\theta_2}{\sqrt{1+\tan^2\theta_2}} = c' \quad \quad \frac{n_2}{c}\cdot\frac{\tan\theta_2}{1/\cos\theta_2} = c'$$

$$1+\tan^2\theta = 1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

Εξισώνω: $n_1\tan\theta_1\cdot\cos\theta_1 = n_2\tan\theta_2\cdot\cos\theta_2 \Rightarrow$

$$\boxed{n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η καμπύλη που διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ $(1,1)$ και ελαχιστοποιεί

$$I[\psi] = \int_0^1\left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 - \psi^2\right]dx$$

Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του ολοκληρώματος και η τιμή $I[\psi = x]$

$$f = (\psi')^2 - \psi^2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial \psi} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \psi'} = -2\psi - \frac{d}{dx}(2\psi') = 0 \Rightarrow \psi'' + \psi = 0$$

$$\psi(x) = A\cos x + B\sin x$$

$$\left.\begin{aligned}\psi(0)&=0\\ \psi(1)&=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}A&=0\\ B\sin 1&=1\end{aligned}\right\} \Rightarrow B = \frac{1}{\sin 1}$$

$$\Rightarrow$$

$$\psi(x) = \frac{\sin x}{\sin 1}$$

$$I\left[\psi = \frac{\sin x}{\sin 1}\right] = \int_0^1 \left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 - \psi^2\right] dx = \int_0^1 \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - x^2\right] dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sin^2 1} - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 1} = \frac{1}{\sin^2 1} \int_0^1 \cos(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\sin^2 1} \sin(2x)\Big|_0^1 = \frac{\sin 2}{2\sin^2 1} = \frac{2\sin 1 \cos 1}{2\sin^2 1} =$$

$$= \cot 1 = 0{,}642$$

$$I[\psi = x] = \int_0^1 (1 - x^2)\,dx = x - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$= 0{,}667$$